

4. Gewöhnliche Differentialgleichungen

4.1. Grundbegriffe

$t \in \mathbb{R}$: (einzige) unabhängige Variable, $()' \equiv \frac{d}{dt}()$
 y : abhängige Variable(n), $y \in \mathbb{R}$ oder $y \in \mathbb{R}^n$

(a) Ordnung

- DGl. 1. Ordnung. Gesucht: Funktion
 $y: t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$

mit $y'(t) = f(t, y(t))$ } Anfangswertproblem (AWP)
 Anfangsbed: $y(t_0) = y_0$

f : eine gegebene Fkt. von 2 Variablen

- DGl. n-ter Ordnung.

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) = y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

AB: $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$

Zurückführung auf System 1. Ordnung:
Vektordifferentialgleichung

Methode: (triviale) Substitution

$$\underline{u}(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

\underline{u} erfüllt die Anf'bed. $\underline{u}(t_0) = (y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})^T$

und die Differentialgleichung

$$\underline{u}'(t) = \underline{F}(t, \underline{u}) := \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ f(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{pmatrix}$$

(b) Autonome DGL.

Def. $y' = f(t, y)$ heisst autonom, falls
"t in f nicht vorkommt", dh. $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

Man schreibt dann zweckmässig $y' = f(y)$.

SATZ: Für $y' = f(y)$ gilt:

Mit $y(t)$ ist auch $y(t-t_0)$ Lösung.

Zurückführung eines allgemeinen
DGL.-Systems auf ein autonomes:

Methode: die Zeit t als weitere abhängige
Variable einführen.

Neue unabhängige Variable: $\tau = t - t_0$

(1) Nicht-autonom: $y' = f(t, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$
 $y(t_0) = y_0$

Autonom: Def: $\underline{Y} := \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\underline{F}(\underline{Y}) := \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{pmatrix}$

Demit ist (1) äquivalent mit

$$\frac{d}{d\tau} \underline{Y}(\tau) = \underline{F}(\underline{Y}(\tau)); \quad \text{AB: } \underline{Y}(0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

(c) Existenzsatz für Differentialgleichungen

SATZ: Gegeben sei die DGE.

(2) $y' = f(t, y), y \in \mathbb{R}^n;$

wobei

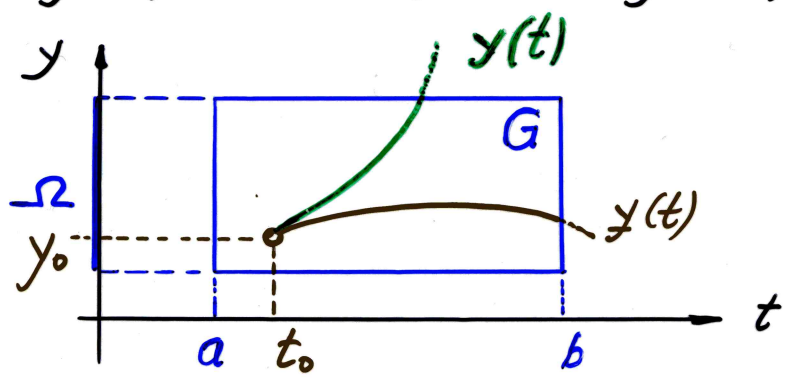
(i) f : def. und stetig in $G := \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, y \in \Omega\}$

(ii) es existiere eine Lipschitzkonstante L so: Intervall
oder Rechteck

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq L \|y_2 - y_1\| \quad \forall (t, y_k) \in G$$

Sei ferner $(t_0, y_0) \in G$ ein bel. Pt. $\in G$

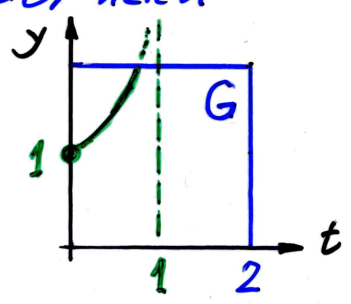
Dann existiert in G genau eine Lösungskurve $y(t)$ von (2) mit $y(t_0) = y_0$. □



Bemerkungen

(i) Lösungskurve kann G nach rechts oder nach oben (unten) verlassen!

Bsp: $y' = y^2, y(0) = 1 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}$
z.B. $G = [0, 2]^2$



(ii) Sei Lipschitzbed. verletzt!

Bsp: $y' = 2\sqrt{y}, y(0) = 0 \Rightarrow y_1(t) = 0$ keine
 $y_2(t) = t^2$ Eindeutigkeit!

4.2 Taylor- und Runge-Kutta-Verfahren

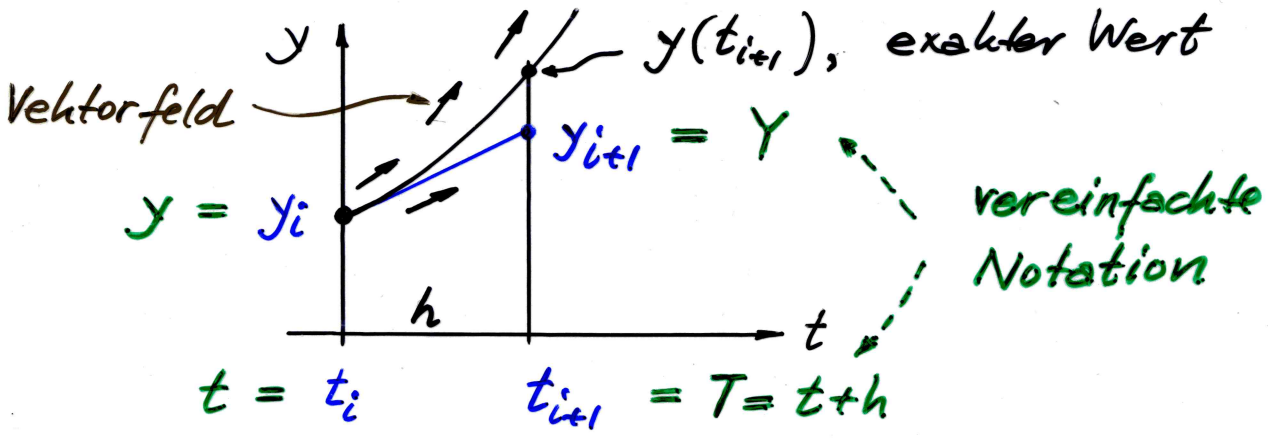
(a) Das Euler-Verfahren

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Diskretisation der Zeit:

$$t_i = t_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots \quad \boxed{t_{i+1} = t_i + h}$$

Schritt: $h = \text{const}$



Exakte Lösung als Taylorreihe:

$$(3) \quad y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2!} y''(t) + \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=: Y}$
im Euler-Verfahren

Restterme
=: lokaler Fehler
(siehe später)

Dabei $y'(t)$ mittels der DGl. ausdrücken!

Zusammengefasst:

Euler-Verfahren für Vektor-DGl. (2):

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h f(t_i, y_i) \\ t_{i+1} &= t_i + h, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}}$$

Bemerkung: Implizites Euler-Verfahren ("Rückwärts-Euler")

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots$$

In jedem Schritt nach der Unbekannten y_{i+1} auflösen! Warum so kompliziert? Siehe § 4.4!

(b) Der Taylor-Algorithmus

Verallgemeinerung des Euler-Verfahrens

Definiere analog zu (3)

(4)
$$Y := y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2!} y''(t) + \dots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}(t)$$

$$= \sum_{j=0}^m \frac{h^j}{j!} y^{(j)}(t)$$

Die Terme der Taylorreihe für die exakte Lösung bis zur Ordnung h^m

Bemerkungen

(i) m heißt Ordnung des Verfahrens

Euler: Ordnung $m = 1$

(ii) Berechne $y^{(j)}(t)$ aus der Diff'gleichung!

Beispiel: $m = 2$: $y'(t) = f(t, y(t))$
 $y'' = f_t + f_y \cdot f$

Also, (4) in ausgeschriebener Form:

(5)
$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left[\underset{\uparrow}{f_t(t_i, y_i)} + \underset{\uparrow}{f_y(i, i)} f(i, i) \right]$$

Funktioniert auch für Vektoren!

Nachteil: Man muss f (symbolisch!) ableiten

(c) Runge-Kutta-Verfahren

Carl David Tolmé Runge (Göttingen), 1856-1927
Wilhelm Martin Kutta (Stuttgart), 1867-1944

Idee: Taylor-Verfahren nachbilden ("simulieren"),
jedoch ohne Differentiation von $f(t, y)$:
durch "geschachtelte" Konstrukte wie $f(f)$.

Einführungsbeispiel

$$y' = f(t, y)$$

"alter" Punkt

Betrachte die Hilfsgrößen

(6)
$$\underline{k}_1 := f(t, y) \quad \text{1. Stufe}$$
$$\underline{k}_2 := f(t + c \cdot h, y + a h \underline{k}_1), \quad \text{2. Stufe (der Schachtelg.)}$$

dann der "neue" Punkt aus

(7)
$$\underline{Y} = y + h (b_1 \underline{k}_1 + b_2 \underline{k}_2).$$

Wähle a, c, b_1, b_2 für möglichst gute
Übereinstimmung mit der Taylorreihe (5):

Hilfsgrößen (6) entwickeln bis Ordnung 2 (nach h):

der Einheit
halber $y \in \mathbb{R}^1$

$$\underline{k}_1 = f(t, y)$$
$$\underline{k}_2 = f + c \cdot h \cdot f_t + (a h f) \cdot f_y + O(h^2)$$

In (7) einsetzen:

$$Y = y + h \underbrace{(b_1 + b_2)}_1 f + h^2 \left(\underbrace{b_2 c}_{\frac{1}{2}} f_t + \underbrace{b_2 a}_{\frac{1}{2}} f_y f \right) + \dots$$

Vergleich mit (5) \Rightarrow $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Es folgt: Man kann die Ordnung $m=2$ erreichen, falls die "Bedingungsgleichungen"

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_2 &= 1 \\ b_2 a &= \frac{1}{2} \\ b_2 c &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ Gleichungen,} \\ 4 \text{ Unbekannte} \end{array}$$

lösbar sind.

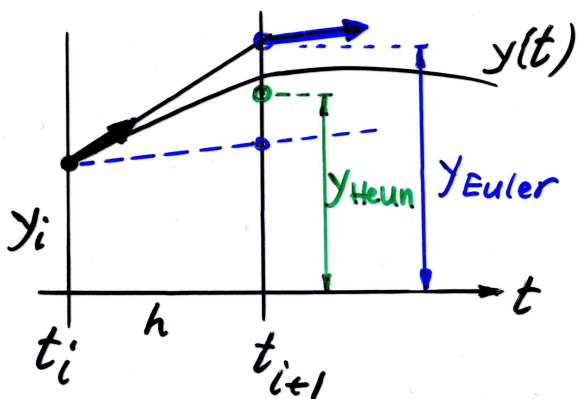
Lösung: Wähle $a = c \neq 0$, denn
 $b_2 = \frac{1}{2a}$, $b_1 = 1 - b_2$

Klassisches Beispiel:

$a = c = 1$ ergibt Verfahren von **Heun**:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + h f(t_i, y_i)) \right]$$

y_{Euler}



Geometrische Deutung

So wurde das Verfahren entdeckt!

Allgemeiner Runge-Kutta-Ansatz

mit s Stufen:

$$K_l = f\left(t + c_l \cdot h, y + h \sum_{p=1}^{P(l)} a_{lp} K_p\right)$$

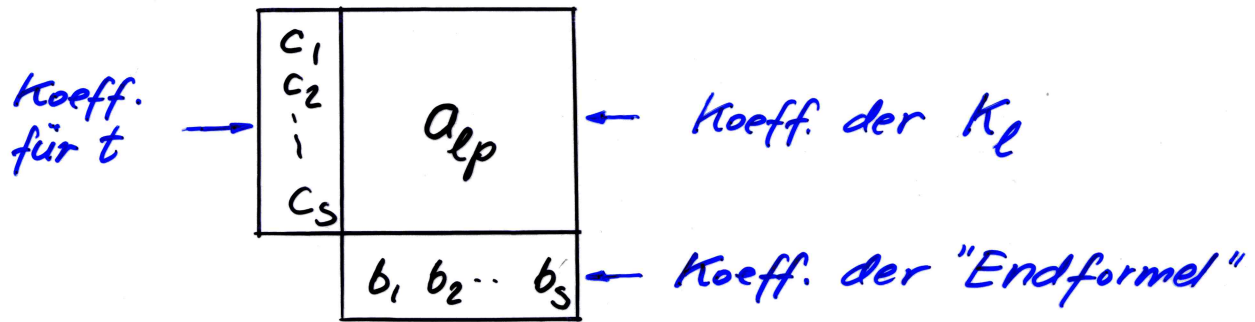
$$Y = y + h \sum_{p=1}^s b_p K_p$$

$l = 1, \dots, s$

↑
Stufenzahl

Obere Summationsgrenze: $P(l) = \begin{cases} l-1 & \text{explizit} \\ l & \text{semi-impl.} \\ s & \text{implizit} \end{cases}$ (68)

Koeffizientenschema:



Bemerkungen:

– Matrix $A = (a_{lp}) = \begin{cases} \begin{array}{|c} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} & \text{ohne Diag: explizit} \\ \begin{array}{|c} \hline \diagup \\ \hline \end{array} & \text{mit Diag: semi-impl.} \\ \begin{array}{|c} \hline \diagup \diagdown \\ \hline \end{array} & \text{voll: implizit} \end{cases}$

– Durch Übergang zu autonomer Schreibweise findet man:

$$c_l = \sum_{p=1}^s a_{lp}, \quad l = 1, 2, \dots, s$$

– Alles funktioniert für $y \in \mathbb{R}^n$, $f, K_l \in \mathbb{R}^n$

Beispiele:

Heun:

0	0	0
1	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Stufenzahl $s=2$

Ordnung $m=2$

"klassisches"
RK-Verfahren
1901

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Stufenzahl $s=4$

Ordnung $m=4$

(eine spezielle Lösung von 11 Glgen mit 13 Unbek.)

4.3. Fehlertheorie

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0$$

Alles gilt für $y \in \mathbb{R}$ oder $y \in \mathbb{R}^n$

1 Schritt (Taylor):

$$y(t_0+h) = \underbrace{y(t_0)}_{\dots y_0} + \underbrace{hy'(t_0) + \dots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(t_0)}_{y_1} + l(t_0, h)$$

Lokaler Fehler an der Stelle t_0 für den Schritt h

Definition:

Lokaler Fehler in t_0 für Schritt h :

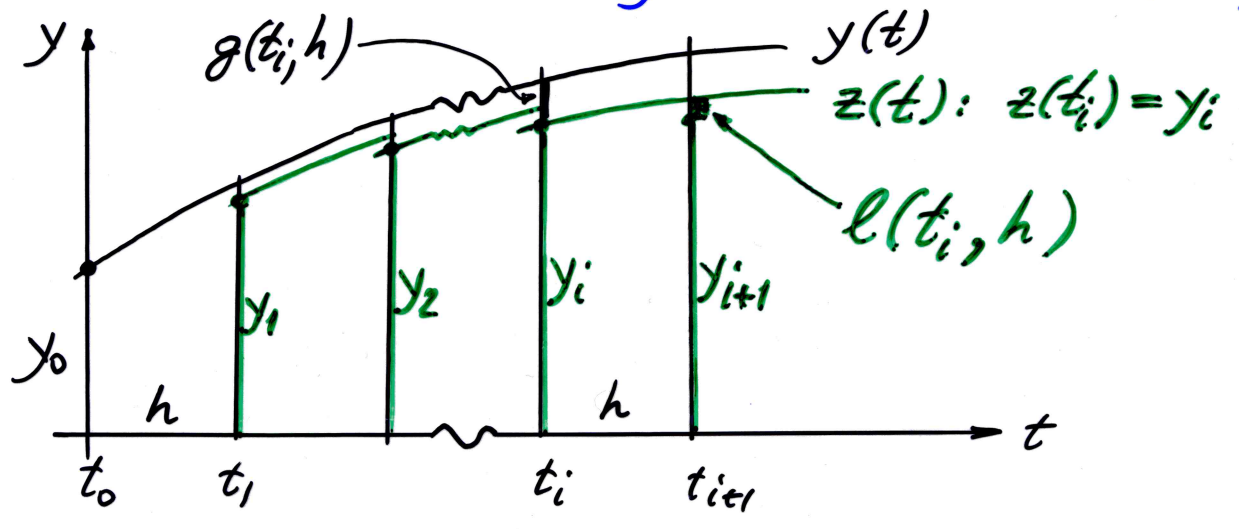
$$l(t_0, h) := y(t_0+h) - y_1$$

Dabei ist y_1 die vom numerischen Verfahren verwendete Approximation für $y(t_0+h)$

Allgemein, im Zeitpunkt t_i

$$l(t_i, h) := z(t_i+h) - y_{i+1}$$

Dabei ist z die Lösung der DGL. mit $z(t_i) = y_i$



Beispiel: $l_{\text{Euler}}(t_i, h) = \frac{h^2}{2} y''(t_i) + O(h^3)$

Für ein Verfahren V der Ordnung m ist der lokale Fehler asymptotisch ($h \rightarrow 0$) von der Form

$$l_V(t, h) = h^{m+1} L_V(t) + O(h^{m+2})$$

Definition:

Globaler Fehler $g_V(t_i, h) := y(t_i) - y_i$
(für Verfahren V)
↑ exakte Lösung an Stelle t_i ↑ Näherung aus Verf. V

Heuristische Betrachtung:

$$g_V(t_i, h) = \sum_{j=0}^{i-1} l_V(t_j, h) = h^m \cdot G_V(t_i)$$

Anzahl der Terme:
 $i = \frac{1}{h}(t_i - t_0)$

1 Ordnung weniger als beim lok. Fehler

Die Zahl $m \in \mathbb{N}$ heisst Fehlerordnung oder Ordnung des Verfahrens V

SATZ: Für ein Verfahren V der Ordnung m gilt:

$$g_V(t, h) = h^m G_V(t) + O(h^{m+1})$$

Konvergenz

Definition: Ein Verfahren V heisst konvergent, falls an der festen Stelle t gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} g_V(t, h) = 0$$

Es gilt: Verfahren mit Fehlerordnung $m \geq 1$ sind konvergent.

4.4. Steife Differentialgleichungen

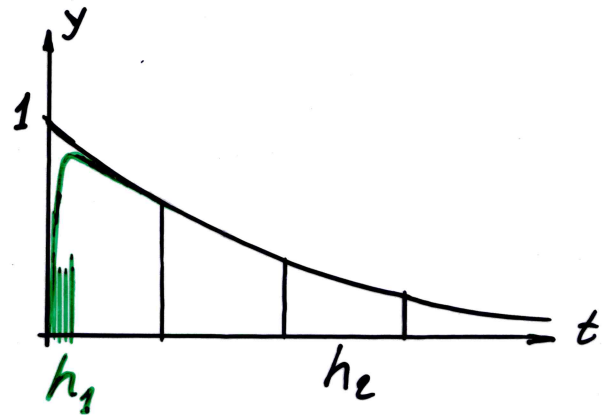
(71)

(a) Einführungsbeispiel

$$y'' + 101y' + 100y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 99$$

$$\text{Exakt: } y(t) = e^{-t} - e^{-100t}$$



Numerische Lösung mit Euler-Verfahren:

Wir betrachten das "Modellproblem"

$$y' = q \cdot y, \quad y(0) = 1. \quad \text{Hier: } q_1 = -100$$

$$\text{Euler: } y_{i+1} = (1 + hq) y_i$$

$$q_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_i = (1 + hq)^i$$

Notwendig für stabile Integration: $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$:

$$|1 + hq_1| < 1, \quad |1 + hq_2| < 1 \Rightarrow 0 < h < \frac{2}{-q_1} = .02$$

Bemerkung: Für genaue Integration muss aber

$$1 + h_1 q_1 \approx e^{h_1 q_1},$$

$$\text{also z.B. } (-q_1) h_1 = 0.1$$

$$\Rightarrow 1 + h_1 q_1 = 0.900, \quad e^{h_1 q_1} = 0.905$$

denn daraus folgt

$$y_i = (1 + h_1 q_1)^i \approx e^{q_1 h_1 i} = e^{q_1 t_i}$$

Vorgehen: (i) Mit $h_1 = 0.001$ integrieren, bis e^{-100t} genügend abgedungen ist, z.B. bis $t = 0.2$:

$$y(0.2) = e^{-0.2} - e^{-20} = 0.818730753 - 2 \cdot 10^{-9}$$

(ii) Für $t \geq 0.2$ möchte man mit größerem (72)
 Schritt integrieren, **angepasst an q_2**
 z.B. $(-q_2)h_2 = 0.1 \Rightarrow h_2 = 0.1$



Fahrverbot!

Geht nicht, da

$$1 + q_1 h_2 = -9$$

instabile Integration!

Da $q_1 = -100$ in der DGL. noch wie vor
 präsent, muss mit kleinem $h \in (0, 0.02)$,
 z.B. mit $h = 0.001$ weiterrechnen. **Aufwand!**

(b) Das Trapezregel-Verfahren

Beispiel eines sog. impliziten Verfahrens,
 geeignet für steife DGL.

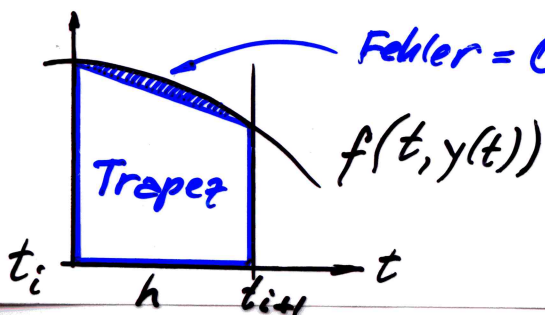
$$(1) \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

Schritt h : $t_1 = t_0 + h$, allg. $t_i = t_0 + i \cdot h$

Integration von (1) über $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

$$(2) \Rightarrow y(t_{i+1}) - y(t_i) = \frac{h}{2} \left[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right] + O(h^3)$$



Dabei wurde das Integral
 rechts durch die Trapezregel
 approximiert

Trapezregelverfahren:

in Glg. (2) Fehlerterm $O(h^3)$ vernachlässigen
sowie $y_i := y(t_i)$:

$$(3) \quad y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})]$$

mit $t_i = t_0 + i \cdot h$ $i = 0, 1, \dots$

y_0 gegeben

— (3) ist eine implizite Gleichung für y_{i+1}
(ein Gleichungssystem, falls $y_i \in \mathbb{R}^n$),
zu lösen mit Fixpunktiteration, Newton,
eventuell exakt.

— Startnäherung für y_{i+1} : y_i (schon berechnet!)

Fehler: Gemäss Konstruktion (S. 72):

lokaler Fehler $\ell_{\text{Trapez}}(t, h) = O(h^3)$

\Rightarrow globaler F. $g_{\text{Trapez}}(t, h) = O(h^2)$

Das Trapezregelverfahren hat
die Fehlerordnung $m = 2$

(c) Numerische Stabilität

Nochmals das Modellproblem $y' = qy$, $y(0) = 1$

$$(3) \Rightarrow y_{i+1} - y_i = \frac{qh}{2} (y_i + y_{i+1})$$

$$\Rightarrow \frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{2 + \mu}{2 - \mu} \quad \text{mit } \mu := q \cdot h$$

Definition: Sei ϕ ein numerisches Verfahren, und seien y_i, y_{i+1} die Näherungen für $y(ih), y((i+1)h)$ bei Anwendung von ϕ auf das Modellproblem

(4) $y' = qy, y(0) = 1.$

Denn hängt $V_\phi(\mu) := \frac{y_{i+1}}{y_i}$ nur von $\mu := q \cdot h$ ab; $V_\phi(\mu)$ heißt **Verstärkungsfaktor** von ϕ .

Beispiele

$V_{\text{Trapez}}(\mu) = \frac{2+\mu}{2-\mu}, \quad V_{\text{Euler}}(\mu) = 1+\mu$

$V_{\text{ideal}}(\mu) = e^\mu, \quad \text{denn } \frac{y(ih+h)}{y(ih)} = \frac{e^{q(i+1)h}}{e^{qih}} = e^\mu$

Bemerkungen:

- $V_\phi(\mu)$ soll für kleine $|\mu|$ eine Approximation von e^μ sein.
- Numerische Lösung des Modellproblems:

$y_i = [V_\phi(\mu)]^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$

wir sind an **abklingenden** Lösungen interessiert. Daher:

Definition: Stabilitätsgebiet des Verfahrens ϕ :

$S_\phi := \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |V_\phi(\mu)| < 1 \}$

Warum $\mu \in \mathbb{C}$? Für Schwingungen, z.B.

$q = i = \sqrt{-1}: \quad y' = iy, y(0) = 1 \Rightarrow y = e^{it} = \cos t + i \sin t$

Betrachte Modellproblem mit $Re(q) < 0$
sowie ein $h > 0$.

Dann gilt $y(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$

sowie $y_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$,
falls $hq \in S_\phi$

Folgerung:

Für $hq \in S_\phi$ wird das Modellproblem (4)
durch das Verfahren ϕ stabil integriert.

Man kann zeigen:

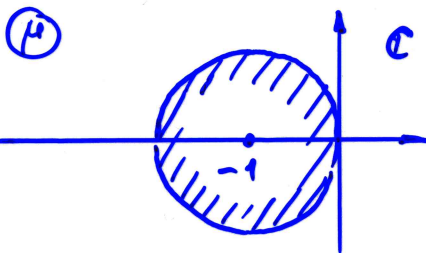
- Der Stabilitätsbegriff kann auf nichtlineare
DGL $y' = f(t, y)$ ausgedehnt werden mit

$$q(t, y) := \frac{\partial}{\partial y} f(t, y).$$

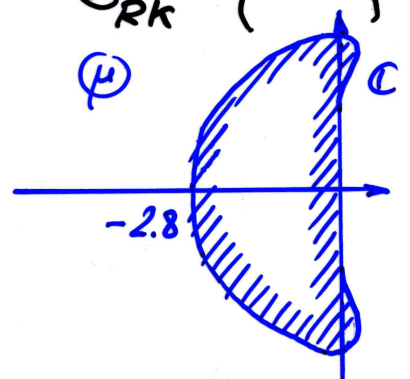
- Solange $h \cdot q(t, y) \in S_\phi$, ist die Integration
stabil.

Beispiele von Stabilitätsgebieten:

$$S_{\text{Euler}} = \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - (-1)| < 1 \}$$



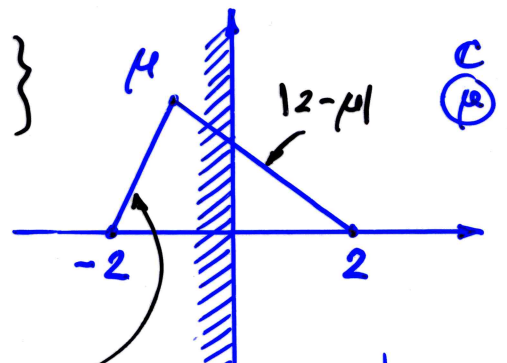
$$S_{\text{RK}} = \{ \dots \}$$



Trapezregel:

$$S_{\text{Trapez}} = \left\{ \mu \mid \frac{|\mu - (-2)|}{|2 - \mu|} < 1 \right\}$$

$$\Rightarrow |\mu + 2| < |2 - \mu|$$



$$S_{\text{Trapez}} = \{ \mu \in \mathbb{C} \mid Re \mu < 0 \}$$

Daraus folgt:

SATZ: Das Trapezregelverfahren integriert jedes Modellproblem (4) mit $Re(q) < 0$ stabil für jeden Schritt $h > 0$.

Bemerkung zum Einführungsbsp. (a), S. 71

Mit dem Trapezregelverfahren kann man für $t > 0.2$ mit einem Schritt $h_2 < 2$ fortfahren (für stabile Integration). Für genaue und stabile Integration z. B. $h_2 = 0.1$.

4.5. Lineare DGl. mit konstanten Koeff.

(a) Definitionen:

$$y: t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^n$$

Problem:

$$(1) \quad \begin{cases} y' = A y, \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \text{konstante Matrix} \end{matrix}$$

Bekannt:

$$(2) \quad n = 1, A \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{At} y_0$$

↑
existiert für alle $t \in \mathbb{R}$

Ziel: Konstruktion einer zu (2) analogen Lösungsformel für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, n > 1$.

SATZ: Die Potenzreihe

(3) $y(t) = y_0 + \frac{t}{1!} A y_0 + \frac{t^2}{2!} A^2 y_0 + \dots$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

konvergiert für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$
und löst das Anfangswertproblem (1)

Beweis

(i) Konvergenz

Def. der Norm

Verwende $\|A^k y_0\| \leq \|A\|^k \cdot \|y_0\|$

sowie Dreiecks-Ungleichung. Dann wie in \mathbb{R} .

(ii) Berechne $\frac{d}{dt} y(t)$ aus (3):

$$y'(t) = A y_0 + \frac{t}{1!} A^2 y_0 + \frac{t^2}{2!} A^3 y_0 + \dots$$

$$= A (y_0 + \frac{t}{1!} A y_0 + \frac{t^2}{2!} A^2 y_0 + \dots) = A y(t)$$

A von links ausklammern

q.e.d.

Definition:

$$A^0 := I$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(4) $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$, Matrix-Exponentialfkt.

Damit wird (3):

(5) $y(t) = e^{At} \cdot y_0$

(exakte Lösung des AWP (1),
gilt für alle $t \in \mathbb{R}$)

(b) Eigenschaften und Berechnung von e^A (78)

(i) $e^A = (e^{A/2})^2$

Beweis: $y(1) = e^A y_0$; $y(\frac{1}{2}) = e^{\frac{A}{2}} y_0 =: \underline{y}$

Betrachte $y(\frac{1}{2} + \tau) = e^{A\tau} \underline{y}$

Mit $\tau = \frac{1}{2}$: $y(1) = e^A y_0 = e^{\frac{A}{2}} (e^{\frac{A}{2}}) y_0$ *q.e.d.*

(ii) Sei A diagonalisierbar, d.h. $A = T D T^{-1}$

Nach Definition (4): $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = I + T D T^{-1} + T \frac{D^2}{2!} T^{-1} + \dots \\ &= T \left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \dots \right) T^{-1} = T e^D T^{-1} \\ &\quad \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \end{aligned}$$

(iii) Berechnungsalgorithmen:

– Methode (ii) falls A diagonalisierbar,

– sonst z.B. $e^A = \left(\dots \left(\left(e^{A/1024} \right)^2 \right)^2 \dots \right)^2$

Berechne $e^{A/1024}$ 2^{10} 10 mal quadrieren
mit Potenzreihe (konvergiert schnell).

(iv) Vorsicht: im allgemeinen $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$
Gleichheit nur, falls $A \cdot B = B \cdot A$

(v) Matlab:

$$\text{expm}(A) = e^A$$

Matrix-Exp.-
Funktion

$$\text{aber } \exp(A) = (e^{a_{kl}})$$

elementweise
Exponentiation

Bemerkung: Allgemeine Matrixfunktion:

(79)

Sei $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ analytisch

Definition: $f(A) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$

Falls A diagonalisierbar, $A = T D T^{-1}$:

$$f(A) = T f(D) T^{-1}$$

\uparrow $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 \uparrow $\text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$

Matlab: $fct(A) = \text{funm}(A, 'fct')$

speziell, vereinfacht: expm , logm , sqrtm

(vi) Exakte Lösung von $y'(t) = A y(t)$
 $y(0) = y_0$

Tabellierung der Lösung mit Schritt h :

Sei $E := e^{A \cdot h}$ (einmal berechnen, teuer!)

Für $y_k := y(k \cdot h)$ gilt:

$$y_{k+1} = E \cdot y_k \quad (k=0, 1, \dots) \quad \text{billig!}$$

Bemerkung:

Mögliche Ungenauigkeiten (in Matlab) rühren nur von der endlichen Rechengenauigkeit her, sind also im allgemeinen von der Grössenordnung $\text{eps} = 2^{-52}$.

4.6. Angewandte Probleme

(80)

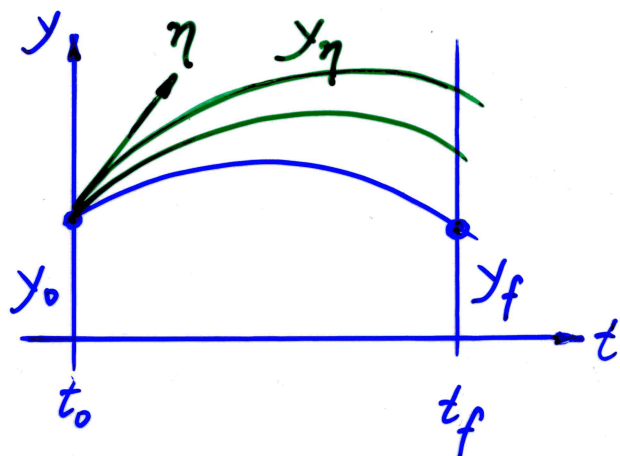
(a) Randwertprobleme: Schiessmethode

Beispiel:

$$\text{DGL: } y'' = f(t, y, y')$$

$$\text{RB: } y(t_0) = y_0$$

$$y(t_f) = y_f$$



Definiere "Probierlösung" $y_\eta(t)$ durch Anf'bed.

$$y_\eta(t_0) = y_0$$

$$y'_\eta(t_0) = \eta \quad (\text{gesuchte Unbekannte})$$

Bedingung für η :

$$y_\eta(t_f) = y_f$$

Definiere Funktion $F(\eta) := y_\eta(t_f) - y_f$

und suche η so, dass $F(\eta) = 0$

$\frac{d}{d\eta} F(\eta)$ steht nicht (direkt) zur Verfügung \Rightarrow

Sekanten-Methode:

Startwerte: $\eta_0, \eta_1 = \eta_0 + \Delta$ (z.B.)

$$\text{Iteration: } \eta_{j+1} = \eta_j - \frac{F(\eta_j)}{\frac{F(\eta_j) - F(\eta_{j-1})}{\eta_j - \eta_{j-1}}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Bei genügend guten Startwerten Konv., Ordng = 1.618

(b) "Ereignisse" (Events)

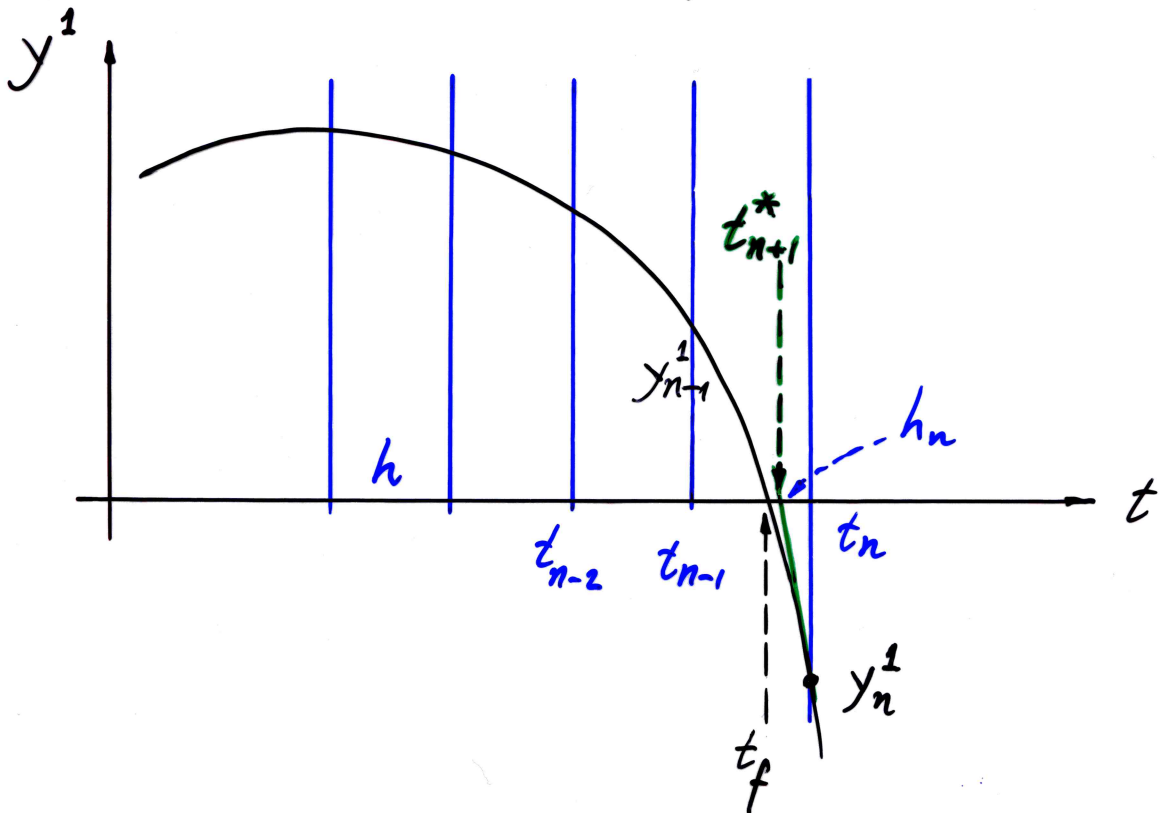
(bei gewöhnlichen Diff'gleichungen)

Einspielen auf vorgeschriebene Endwerte von abhängigen Variablen

Beispiel: $y' = f(t, y)$
 $y(0) = y_0$

$$y = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Aufgabe: Suche $t = t_f$ mit $y^1(t_f) = 0$



Reguläre Phase

Numerische Integration, mit Verfahren V der Wahl, z.B. mit konstantem Schritt h , bis erstmals

$$y_n^1 \cdot y_{n-1}^1 < 0$$

Endphase

Newton-Verfahren zur Lösung der Gleichung

$$F(t) := y^1(t) = 0$$

$$\text{Startwert: } t = t_n$$

Ableitung von F aus DGl. bekannt:

$$\left. \frac{d}{dt} F(t) \right|_{t=t_n} = f^1(t_n, y_n)$$

Erster Newton-Schritt:

$$t_{n+1}^* = t_n - \frac{y_n^1}{f^1(t_n, y_n)} = t_n + h_n$$

Erste Korrektur zu t_n :

$$h_n := -y_n^1 / f^1(t_n, y_n),$$

als nächsten Integrationsschritt mit Verfahren V durchzuführen!

Algorithmus für Endphase:

$$t = t_n ; \quad y = y_n^1 ;$$

$$\text{while } |h| > \text{tol}, \quad h = -y / f^1(t, y);$$

$$y = \text{Integrations-schritt}(t, y, h);$$

$$t = t + h;$$

end;

(c) Method of Lines

(Numerische Lösungsmethode für parabolische part. DGL., z.B. Wärmeleitg.)

Idee: Partielle DGL. nur im Raum diskretisieren. Ergibt System von gewöhnlichen DGL. in der Zeit.

Beispiel: Wärmeleitung:

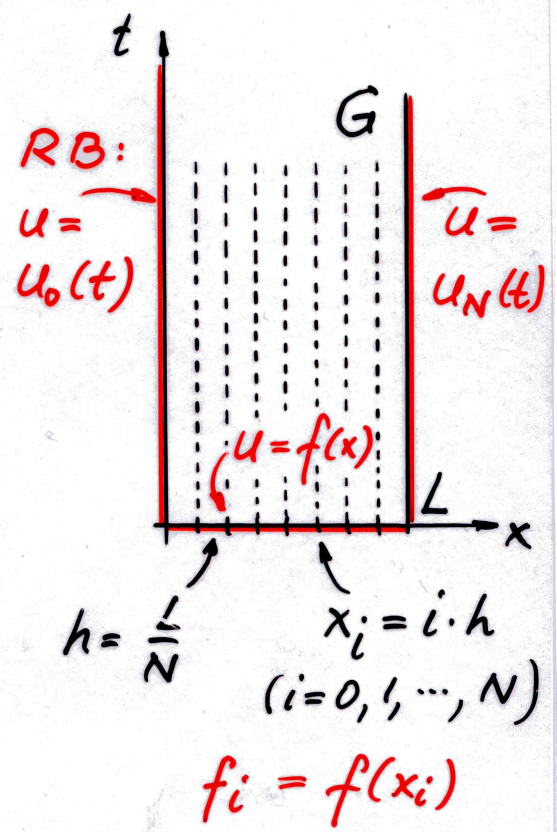
$$u = u(x, t) :$$

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in } G$$

$$u(0, t) = u_0(t), \quad t > 0$$

$$u(L, t) = u_N(t), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$



Diskretisation

$$u_i(t) := u(x_i, t)$$

$$u_{xx}(x_i, t) = \frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \mathcal{O}(h^2)$$

Bezeichnung:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}(t) \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(*) \Rightarrow

$$h^2 \frac{d}{dt} \underline{u} = A^* \cdot \begin{bmatrix} u_0(t) \\ \underline{u}(t) \\ u_N(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{u}(0) = \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$